EEN EI HOORT ERBIJ

Jacques Jansen

BIJLAGE BIJ UITDAGENDE PROBLEMEN (892)

In het artikel Een ei hoort erbij (Euclides nummer 2 jaargang 89) wordt de inhoud van een ellipsoïde die om de x-as gewenteld is vergeleken met de inhoud van zijn broertje die om de y-as gewenteld is. In het artikel staat: 'In de klas ontstaat vaak een leuke brainstorming. En dan is het nog de kunst om ook die factor $\sqrt{2}$ te verklaren. Is dat mogelijk?' In deze bijlage gaan we hier verder op in.

Eerste aanpak: met behulp van primitiveren

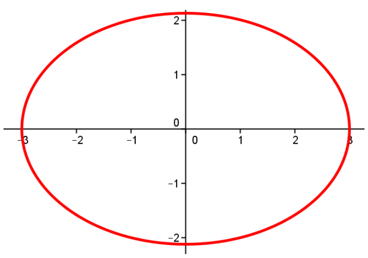
Beschouw een ellips met halve breedte a en halve hoogte b.

De bijbehorende formule is $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$.

Voor ons ei gold $x^2 + 2y^2 = 9$, dus hier is de halve breedte gelijk aan $a = 3$ en de halve hoogte gelijk aan

$b = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$. De halve hoogte is dus een factor $\sqrt{2}$

kleiner dan de halve breedte: $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$.



Met primitiveren vinden we: inhoud na wentelen om x-as is

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b \quad = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot b$$

Inhoud na wentelen om y-as is

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot b = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot a$$

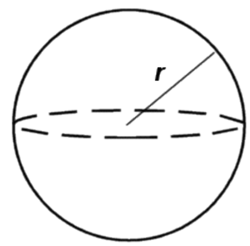
Wentelen om x-as geeft dus een inhoud die een factor $\sqrt{2}$ kleiner is.

Tweede aanpak: met behulp van oprekken in de richting van de assen

Bekend is de inhoud van een bol met straal r, namelijk

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

.



Voor $r = 1$ (eenheidsbol) is

de inhoud $= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

We gaan de bol oprekken met factor 3 in de x-richting; dan

wordt de inhoud $= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$.

Vervolgens gaan we oprekken in de y-richting met factor $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Dat geeft inhoud $= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 1$.

Tot slot rekken we op in de z-richting met dezelfde factor:

$$\text{inhoud} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = 18\pi .$$

Hiermee hebben we een ellipsoïde gekregen die hetzelfde resultaat geeft als de eerder genoemde ellips gewenteld om de x-as.

De inhoud bij wentelen om de y-as kunnen we berekenen door de eenheidsbol op de volgende manier op te rekken:

In x-richting met factor 3

In y-richting met factor $\frac{3}{\sqrt{2}}$

In z-richting met factor 3

Resultaat: inhoud$= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 3 = 18\pi \cdot \sqrt{2}$.

Zo zien we dus de $\sqrt{2}$ terug doordat dit de factor is die tussen de twee mogelijke oprekfactoren voor de z-richting zit.